ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS 1975

OPTION : P'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

L'espace affine enclidien orienté E_3 de dimension trois est supposé rapporté au repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A toute courbe Γ de E_3, on associe la courbe Γ' ensemble des centres de courbure de la courbe Γ. On étudie les courbes Γ, non planes, dont les courbes associées Γ' sont planes.

(On rappelle que la torsion ne figure pas au programme du concours)

I

On considère la courbe Γ_o, ensemble des points $M(\lambda)$ tels que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{OM}(\lambda) = \frac{a\sqrt{2}}{ch(\frac{\lambda}{a})}\vec{i} + [\lambda - a\,th(\frac{\lambda}{a})]\vec{j} + a\,th(\frac{\lambda}{a})\vec{k}$$

(où a désigne un réel donné strictement positif.)

a) Dessiner les projections de Γ_o sur les plans de coordonnées.

b) Déterminer le trièdre de Frenet en un point quelconque de Γ_o orientée dans le sens des λ croissants. Calculer le rayon de courbure de Γ_o au point $M(\lambda)$ et déterminer la courbe Γ'_o associée à la courbe Γ_o.

II

1°) Soit Γ une courbe non plane arbitraire de courbe associée Γ'. M' étant le centre de courbure de Γ au point M, montrer que la tangente en M à la courbe Γ et la tangente en M' à la courbe Γ' sont orthogonales.

2°) ρ et u étant deux fonctions réelles d'une variable réelle admettant des dérivées continues ρ' et u' dans un intervalle ouvert I de R qui contient o, on considère la courbe Γ, ensemble des points $M(\theta)$ définis par :

$$\forall \theta \in I \qquad \overrightarrow{OM}(\theta) = \left[\int_o^\theta \rho(t)\cos t\, u'(t)\,dt\right]\vec{i} + \left[\int_o^\theta \rho(t)\sin t\, u'(t)\,dt\right]\vec{j} + u(\theta)\vec{k}$$

On suppose que la fonction u', dérivée de la fonction u, est strictement positive dans l'intervalle I . Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ' associée à la courbe Γ soit une courbe du plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$u [\rho'^2 + \rho^2 (1 + \rho^2)] - \rho (1 + \rho^2) \rho' u' = 0$$

Montrer que, si la fonction ρ , continue , à dérivée continue dans l'intervalle I , est donnée, ρ et ρ' ne s'annulant pas dans I, il existe en général des fonctions u telles que la condition précédente soit vérifiée.

3°) Dans cette question, on propose de déterminer au moyen de l'expression proposée au 2°) ci-dessus quelques courbes Γ dont la courbe Γ' associée est une courbe du plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Résoudre le problème lorsque ρ est la fonction définie par :

$$\theta \in] -\frac{\Pi}{2}, +\frac{\Pi}{2} [\longmapsto \rho (\theta) = \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

Montrer que l'on trouve, en particulier, la courbe Γ_0 (de la partie I) . Pour cela, on posera :

$$\theta = - \text{Arc tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ sh } \mu \right)$$

b) Résoudre le problème lorsque ρ est la fonction définie par :

$$\theta \in] -\frac{\Pi}{2}, +\frac{\Pi}{2} [\longmapsto \rho (\theta) = \text{tg } \theta$$

Déterminer une représentation paramétrique des coubes Γ_1 correspondantes, l'ordonnée $y (\theta)$ étant laissée sous forme d'une intégrale définie.

c) On adopte enfin la fonction ρ définie sur R par $\rho (\theta) = \text{sh } \theta$.

Montrer que les courbes Γ obtenues (désignées alors par Γ_2) sont définies par la représentation paramétrique

$$x = \frac{a}{10} (2 \cos \theta \text{ ch } 2\theta + \sin \theta \text{ sh } 2\theta)$$

$$y = \frac{a}{10} (2 \sin \theta \text{ ch } 2\theta - \cos \theta \text{ sh } 2\theta)$$

$$z = a \text{ sh } \theta$$

(dans laquelle a désigne une constante arbitraire)

d) Effectuer les tracés des projections sur les trois plans de coordonnées d'une des courbes Γ_2 .

Soit m la projection orthogonale sur $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'un point M de la courbe Γ_2 . La courbe ensemble des points m étant notée γ_2 , on introduit l'abscisse curviligne de m sur γ_2 . En interprétant géométriquement la relation entre cette abscisse σ et la cote z de M , indiquer une génération de Γ_2 à partir de la courbe γ_2 .

III

Dans cette troisième partie, on propose l'étude du problème inverse : Une courbe plane Γ' étant donnée, peut-on la considérer conne étant la courbe associée à une certaine courbe gauche Γ ?

La courbe Γ' est supposée donnée dans le plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $(M', \vec{t'}, \vec{n'}, \vec{k})$ le trièdre de Frenet de Γ' au point M' et par R' le rayon de courbure de Γ' au point M' .

On détermine un point M par ses coordonnées sphériques $(\lambda, \theta, \varphi)$ dans ce trièdre, ce qui revient à poser :

$$\overrightarrow{M'M} = \lambda \sin\theta \, \vec{u} + \lambda \cos\theta \, \vec{t'}$$

avec

$$\vec{u} = \vec{n'} \cos\varphi + \vec{k} \sin\varphi$$

On introduit également le vecteur $\vec{v}$ défini par :

$$\vec{v} = -\vec{n'} \sin\varphi + \vec{k} \cos\varphi \ .$$

1°) Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur λ, θ, φ et leurs dérivées respectives par rapport à l'abscisse curviligne σ sur Γ' pour que le point M décrive une courbe Γ dont la courbe associée soit la courbe Γ' .

2°) Les notations restant identiques aux précédentes, on pose $\psi = (\vec{i}, \vec{t'})$. On demande de déterminer les courbes Γ' du plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$ pour lesquelles il existe une courbe Γ, solution du problème précédent, et pour lesquelles, en outre, on a $\psi = \theta$ (c'est-à-dire $(\vec{i}, \vec{t'}) = (\vec{t'}, \overrightarrow{M'M})$) . On déterminera d'abord les fonctions λ, φ, R' en utilisant la variable θ , puis on donnera une représentation paramétrique des courbes Γ' .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail